Misure e incertezze di misura

Perché si misura 1/3

- Determinare il valore (costo) di oggetti

- Determinare la qualità di beni
  - Esempi:
    - dimensione di terreni, stoffe, ...
    - quantità di grano, sementi, acqua, ...

- Storicamente: “Pesi e misure”

Perché si misura 2/3

- Motivazioni di tipo tecnico
  - prove di accettazione per i semilavorati
    - intercambiabilità fra i prodotti di più fornitori
  - prove per la verifica della qualità del processo produttivo
    - compatibilità fra pezzi provenienti da processi diversi
  - prove per la verifica della qualità dei prodotti finiti
    - compatibilità fra prodotto e specifiche di progetto
  - confronto fra prodotti di fornitori differenti

Perché si misura 3/3

- Motivazioni di tipo scientifico
  - conoscere un fenomeno fisico e ricavarne un modello (sperimentazione sul fenomeno fisico):
    - validare i parametri del modello mediante verifica sperimentale (migliorare l’accuratezza del modello)
    - tenere sotto osservazione (monitorare) il fenomeno per intervenire e modificare il suo comportamento

In tutte queste operazioni

- Occorre un **accordo**
  - su **un'unità di misura** e sul **campione**
    - es.: per le lunghezze il metro
  - su un **metodo** di misurazione
    - es.: confronto diretto fra la grandezza da misurare e il campione
  - sulle **modalità** di **comunicare** il risultato della **misura**
    - es.: regole di scrittura e incertezza della misura

Riassumedo 1/4

- Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico

Riassumedo 2/4

- Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico

- Il risultato di una misurazione (cioè l'informazione ottenuta) si chiama **misura**

Riassumedo 3/4

- Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico
- Il risultato di una misurazione (cioè l'informazione ottenuta) si chiama **misura**
- La **misura** è definita quando sono dichiarati:
  - il valore numerico stimato
  - l'unità di misura associata
  - l'intervallo di valori che può assumere il valore stimato

Riassumedo 4/4

- Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico

- Il risultato di una misurazione (cioè l'informazione ottenuta) si chiama **misura**

- La **misura** è definita quando sono dichiarati:
  - il valore numerico stimato
  - l'unità di misura associata
  - l'intervallo di valori che può assumere il valore stimato

- Il procedimento con cui si misura si chiama **misurazione**

La misura

- **Associa dei valori numerici** alle proprietà e/o alle caratteristiche di oggetti o fenomeni fisici al fine di descriverli in modo quantitativo e condiviso

Esempio: Volume di un solido $\rightarrow$ $(15{,}2 \pm 0{,}1)\ \mathrm{cm}^3$

Tensione a vuoto di una batteria $\rightarrow$ $(9{,}6 \pm 0{,}2)\ \mathrm{V}$

Resistenza di un resistore $\rightarrow$ $(12{,}5 \pm 0{,}1)\ \Omega$

Espressione della Misura

- Si noti come negli esempi precedenti viene dichiarato:
  - il valore numerico stimato (volume 15,2)
  - l'intervallo di valori che può assumere il valore stimato ($\pm$ 0,1)
  - l'unità di misura associata (cm^3)

L’incertezza

- Ad ogni misura è sempre associata l’informazione essenziale **sull’incertezza**:
  - cioè l’ampiezza della fascia di valori all’interno della quale si stima sia collocato il valore misurato
  - l’incertezza indica quanto è **significativa** la misura ottenuta
  - l’incertezza deve essere:
    - **stimata** dallo sperimentatore
    - **comunicata** sempre

Attori coinvolti nella misurazione 1/2

- **In un processo di misurazione sono coinvolti molteplici attori:**
  - il misurando (descritto con un modello della grandezza che si vuole misurare)
  - i parametri ambientali (temperatura, umidità, disturbi di tipo elettrico, ecc..)
  - l’operatore (che effettua delle azioni e raccoglie l'informazione di misura)

Attori coinvolti nella misurazione 2/2

– il metodo di misurazione e la procedura utilizzata

– la strumentazione di misura

– il campione di riferimento

Grandezze d'influenza 1/4

Tutte quelle grandezze, coinvolte nel processo di misurazione che:

Grandezze d'influenza 2/4

Tutte quelle grandezze, coinvolte nel processo di misurazione che:

- Sono diverse dal misurando,

Grandezze d'influenza 3/4

Tutte quelle grandezze, coinvolte nel processo di misurazione che:

- Sono diverse dal misurando,

- La cui variazione altera in modo apprezzabile il risultato della misura sono chiamate

Grandezze d'influenza 4/4

Tutte quelle grandezze, coinvolte nel processo di misurazione che:

- Sono diverse dal misurando,
- La cui variazione altera in modo apprezzabile il risultato della misura sono chiamate

Grandezze di influenza

L’incertezza

- A causa dell’imperfetta misurazione il risultato non coincide con il valore di misura che idealmente dovrebbe essere attribuito al misurando
- Si ha dunque un errore (scarto, scostamento), originato da svariati contributi (effetti delle sorgenti di incertezza) che lo producono
- Se si ripetono le misurazioni, si ha una dispersione dei valori che possono essere trattati con tecniche statistiche e probabilistiche

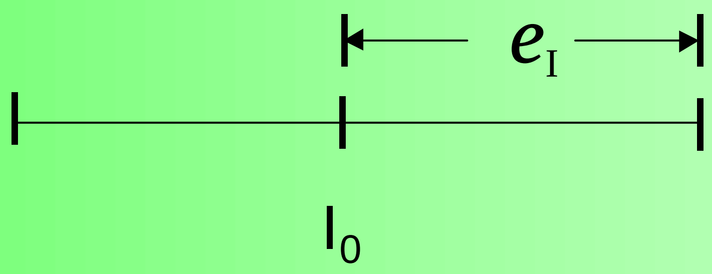
Modi di esprimere l’incertezza 1/4

- Viene indicata la semiampiezza della fascia di incertezza centrata intorno al valore di misura.

Modi di esprimere l'incertezza 2/4

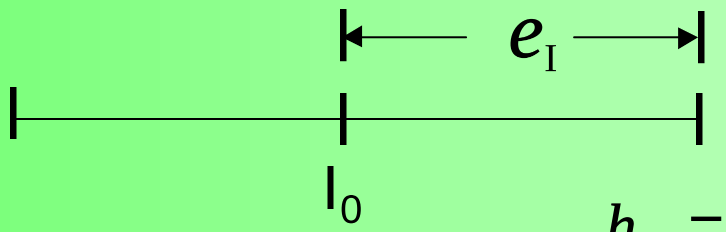
- Viene indicata la semiampiezza della fascia di incertezza centrata intorno al valore di misura.

- Questa può essere espressa (per esempio nel caso di misura di una corrente I_0) come:
  - **valore assoluto e_I = 0,004 A**



Modi di esprimere l’incertezza 4/4

- **Valore relativo** (riferito al valore I_0 misurato) espresso normalmente in percento
  - $\eta_I = \varepsilon_I / I_0 = 0{,}13\%$



$h_I = (\varepsilon_I / I_0) \times 100$

- **Valore ridotto** (riferito a un valore convenzionale I_{FS}) espresso normalmente in percento
  - $\rho_I = \varepsilon_I / I_{FS} = 0{,}04\%$ (e viene indicato anche il valore di I_{FS}=10 A)

$\rho_I = (\varepsilon_I / I_{FS}) \times 100$

L’incertezza non è mai nulla

Per vari motivi:

- Il misurando è affetto da una **incertezza intrinseca** (anche dovuta a imperfezioni di modello)
- I campioni che si utilizzano nel confronto sono affetti da incertezze
- Lo stato dei sistemi che interagiscono nella misurazione (sistema misurato, dispositivi, campione, ...)
  - non è perfettamente definito
  - varia al variare delle condizioni al contorno (ambientali)

Correzioni

- Alcuni scarti sono però calcolabili sulla base di **modelli determinati** da:
  - conoscenze sul **comportamento** dei sistemi che intervengono nella misurazione
  - conoscenze dell'**effetto** delle grandezze di influenza
- Calcolati questi scarti, si può **correggere** la misura (se la componente di errore è significativa)
  - esempio: "errori" di consumo degli strumenti (carico strumentale)

Espressione della grandezza in misura

- In generale la grandezza q in misura è esprimibile in funzione di altre grandezze q_i secondo una relazione

$$\mathbf{q = f(q_1, q_2, \ldots.\ q_m)}$$

- A questa relazione è associata una analoga relazione tra misure che definisce *n* (misura di q)

$$n = f(n_1, n_2, \ldots.\ n_m)$$

- Le n_i possono essere indifferentemente sia misure di grandezze q_i sia valori noti per altra via (costanti fisiche o strumentali)

Valore da attribuire alla misura

- Il valore n_o da attribuire alla misura è dato da:

$$n_o = f(n_{1o}, n_{2o}, ... n_{mo})$$

- Dove n_{io} sono le misure n_i , o i valori delle grandezze note

Calcolo della variazione di n_o 1/2

- L'effetto di variazioni delle n_{io} su n_o può essere calcolato sulla base delle seguenti ipotesi:
  - sono definite e calcolabili le **derivate parziali prime** di $f(\chi)$ rispetto alle variabili indipendenti
  - le variazioni dn_i sono **piccole** rispetto ai valori n_{io}

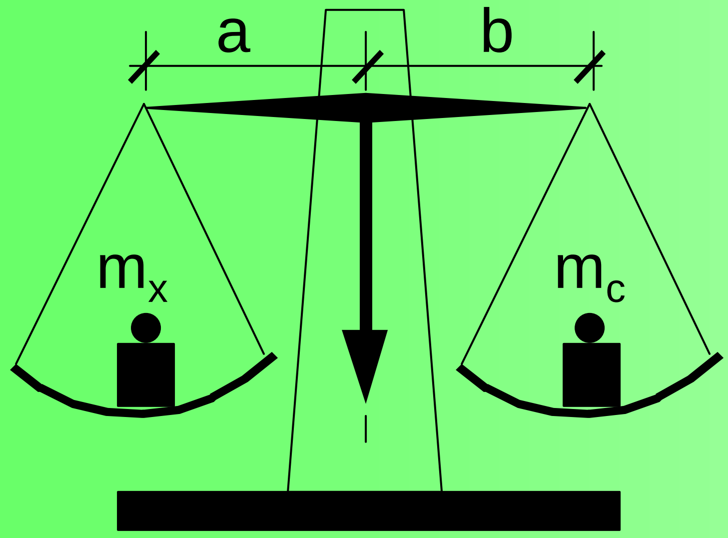
Calcolo della variazione di n_o 2/2

- Si può calcolare la variazione *dn_i ....*

$$dn_o = \left(\frac{\partial f}{\partial n_{1o}}\right) dn_{1o} + \left(\frac{\partial f}{\partial n_{2o}}\right) dn_{2o} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial n_{mo}}\right) dn_m$$

- Limitandosi ai termini dello sviluppo in serie del primo ordine se *f(x)* non è fortemente non lineare

Esempio bilancia a due piatti



- All'equilibrio la funzione che esprime m_x=f(a,b,m_c) è m_x=(b/a)m_c
  - m_c massa campione,
  - a e b possono essere quantità note o anche misurate in fase di misurazione

La relazione tra le rispettive misure è $\boldsymbol{m_x=(b/a)\ m_c}$

Variazione delle lunghezze a, b, e di m_c

- Si può calcolare la variazione dm_x

$$dm_x = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) da + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) db + \left(\frac{\partial f}{\partial m_c}\right) dm_c =$$

$$= \frac{m_c}{a} db + \frac{b}{a} dm_c - \frac{b}{a^2} m_c da$$

- Nella relazione da, db, dm_c sono incrementi finiti e determinati,
- Formalmente però la semiampiezza della fascia di incertezza può essere matematicamente trattata come una variazione

Dalle variazioni alle incertezze

In questo caso

- Il valore delle variazioni **non è determinato**, nel senso che $da,\ db,\ dm_c$ definiscono il limite superiore di una fascia all'interno della quale si trova il valore di misura

- Il segno delle variazioni **non è noto** (perché non si conosce se il valore di misura è superiore o inferiore al valore centrale della fascia)

Come passare alle incertezze

- Si possono quindi assumere due diversi atteggiamenti per applicare la relazione che calcola dm_x ad una analoga relazione che stima l'incertezza $\mathbf{e}_{mx}$

- La stima di $\mathbf{e}_{mx}$ può essere fatta sulla base di uno dei seguenti due modelli :
  - **modello deterministico**
  - **modello probabilistico**

Modello deterministico 1/2

- È un modello **semplicistico**
- Ogni contributo di incertezza è stimato nelle **condizioni peggiori**
- L'ampiezza della fascia di incertezza è ottenuta **sommando i valori assoluti** dei singoli contributi

Modello deterministico 2/2

- L’ampiezza della fascia è tale da garantire che il valore del misurando sia compreso all’interno della fascia
- Si stima l’incertezza in modo **pessimistico** (worst case)

Stima col Modello deterministico 1/3

- Definita la relazione

$$n = f(n_1, n_2, ... n_m)$$

- Se si stimano le dn_i come semi ampiezza massima ($dn_i > 0$) della fascia di incertezza con cui si conoscono le n_i

Stima col Modello deterministico 1/3

- Se le incertezze dn_i sono **piccole** rispetto alle misure n_i (cioè la funzione è linearizzabile nell'intorno)

- Se le grandezze q_i, di cui n_i sono le corrispondenti misure, sono tutte **indipendenti fra di loro**

Stima col Modello deterministico 3/3

- L'incertezza massima *dn* da attribuire alla misura è data da:

$$dn = \left|\frac{\partial f}{\partial n_1}\right| dn_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial n_2}\right| dn_2 + \ldots \left|\frac{\partial f}{\partial n_m}\right| dn_m$$

- *dn* è una combinazione lineare delle varie incertezze in cui ciascuna contribuisce con un fattore peso

$$\left|\frac{\partial f}{\partial n_i}\right|$$

Esempi ($a > 0,\ b > 0$)

- Somma $\begin{cases} x = a + b \\ dx = E_x = da + db \end{cases}$

- Differenza $\begin{cases} x = a - b \\ dx = E_x = da + db \end{cases}$

- **Nota:** in entrambi i casi si sommano le incertezze assolute

Esempi 1/2

- Prodotto
$$\begin{cases} x = a \cdot b \\ \dfrac{dx}{|x|} = e_x = \dfrac{da}{|a|} + \dfrac{db}{|b|} = e_a + e_b \end{cases}$$

- Quoziente
$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{dx}{|x|} = e_x = \dfrac{da}{|a|} + \dfrac{db}{|b|} = e_a + e_b \end{cases}$$

Nota: in entrambi i casi si sommano le incertezze relative

Esempi 2/2

- Potenza
$$\begin{cases} x = a^n \\ \dfrac{dx}{|x|} = e_x = n\dfrac{da}{|a|} = n e_a \end{cases}$$

Radice
$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{a} \\ \dfrac{dx}{|x|} = e_x = \dfrac{1}{n}\dfrac{da}{|a|} = \dfrac{e_a}{n} \end{cases}$$

Modello probabilistico 3/3

- Modello più **raffinato**, che fornisce una stima più **realistica**
- È il modello che **deve essere usato nella stima delle incertezze nella emissione di certificati ufficiali**
- Modello previsto dalla Guida all'espressione dell'incertezza di misura (GUM)

Modello probabilistico dell’incertezza 1/6

- La fascia di incertezza assume un significato che va **associato** al concetto di **probabilità che la misura rientri** in quella fascia
- La singola misura è considerata come una estrazione a caso in un insieme di tutte le misure possibili (idealmente infinite)

Modello probabilistico dell'incertezza 2/6

- La distribuzione delle frequenze di occorrenza delle singole misure tende ad una distribuzione normale (**curva gaussiana**)
- Anche la distribuzione (densità) di probabilità assume un andamento gaussiano (**approccio frequenzistico**)

Modello probabilistico dell'incertezza 4/6

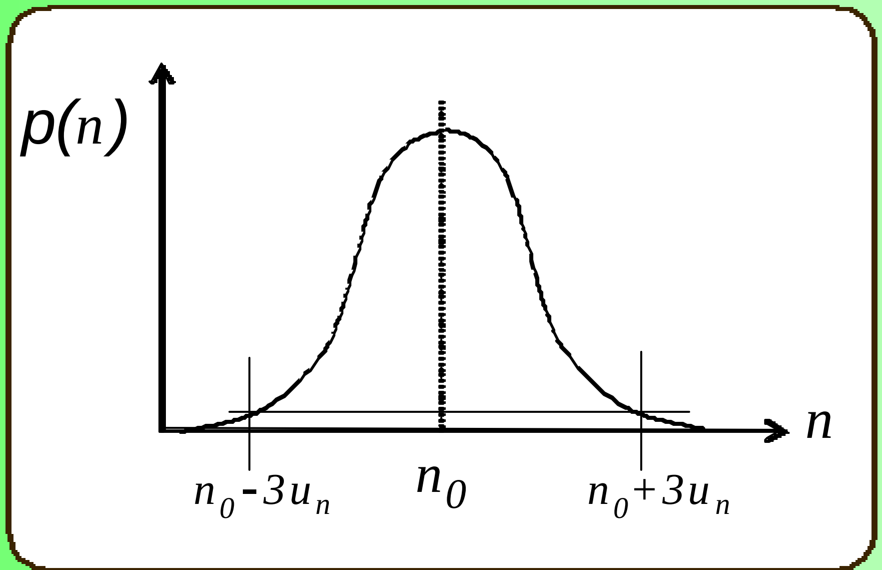
- Viene introdotto il concetto di **incertezza tipo u_n** come la radice positiva della varianza $\mathbf{s}^2$ che numericamente è espresso dalla deviazione standard $\mathbf{s}$ della distribuzione
- La probabilità (**livello di fiducia**) che il valore cada all'interno della fascia di semiampiezza u_n centrata intorno al valore di stima è del 68,4%

Modello probabilistico dell'incertezza 5/6

- Se si richiede un livello di fiducia più elevato occorre moltiplicare u_n per un fattore k detto **fattore di copertura**
- Si ottiene così **l'incertezza estesa** $U_n = k\, u_n$

Modello probabilistico dell'incertezza 6/6

- Per una densità di probabilità gaussiana con ***k*** =2 (e quindi incertezza estesa $\boldsymbol{U_n = 2\, u_n}$)
  - La probabilità (**livello di fiducia**) sale al 95,45%
- Con ***k*** =3 il livello di fiducia diventa 99,7%



Strategie della misurazione 1/3

- Si possono adottare due strategie:
  - accontentarsi di una singola misurazione
  - ripetere più volte la misurazione (ipotizzando che il misurando sia invariante)
- La **prima strategia** di solito si adotta quando si utilizzano metodi e strumenti non troppo “sensibili”, cosicchè ci si aspetta di ottenere sempre lo stesso risultato
- La **seconda strategia** si adotta con strumenti e metodi tanto “sensibili” da mettere in evidenza le variazioni indotte sulla misura dalle numerose grandezze di influenza

Strategie della misurazione 2/3

- Poiché le grandezze d'influenza interagiscono in modo casuale, ad ogni ripetizione della misurazione, si ottengono risultati diversi
- Dispersione delle misure
- Nell'ipotesi che gli effetti del rumore sulla misura siano a valore medio nullo
- La stima migliore della misura è data ragionevolmente dalla media delle misure ripetute

Strategie della misurazione 3/3

- Non tutte le grandezze di influenza però hanno un effetto aleatorio a valor medio nullo
- Alcune introducono effetti sistematici (si pensi per esempio alla perturbazione prodotta sul misurando dallo strumento di misura)
- Questa perturbazione non potrà essere stimata ripetendo più volte la misurazione
- Il suo effetto infatti si manifesta in modo costante ad ogni ripetizione

Modello probabilistico delle incertezze

- La **GUM** fa riferimento a due diverse tipologie di incertezza che si differenziano per i diversi strumenti matematici utilizzati per la loro valutazione
  - incertezze di **categoria A**
    - l’incertezza tipo si stima con una analisi statistica di una serie di osservazioni (misure ripetute)
  - incertezze di **categoria B**
    - l’incertezza tipo si stima con mezzi diversi dagli usuali strumenti statistici

Misure ripetute

- Sono considerate *m* **osservazioni indipendenti** n_k della grandezza q eseguite nelle stesse condizioni sperimentali
- La stima del valore sperato (la misura migliore) è data dalla **media aritmetica** delle osservazioni

$$\bar{n} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k$$

Varianza sperimentale delle misure

- La **varianza sperimentale** s^2, stima della varianza σ^2 della distribuzione, ottenuta solo su *m* valori sperimentali n_k , è data da:

$$s^2(n_k) = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}\left(n_k - \bar{n}\right)^2$$

Varianza della media

- La miglior stima della **varianza della media** sperimentale è data da:

$$s^2\left(\overline{n}\right) = \frac{s^2(n_k)}{m}$$

La sua radice quadrata è chiamata **scarto tipo sperimentale della media** e rappresenta **l'incertezza tipo**

$$u\left(\overline{n}\right)$$

Incertezza tipo di categoria A

- L’ incertezza di categoria A viene dunque valutata come:
  - l’incertezza tipo, data dalla radice positiva della varianza della media
  - sono inoltre indicati i gradi di libertà (numero di osservazioni indipendenti utilizzate per il calcolo della varianza)

- la stima migliore della misura è data dalla **media aritmetica** delle misure (ripetute con lo stesso strumento)

Incertezza tipo di categoria B 1/2

- La incertezza di categoria B è valutata **"a priori"** analizzando il sistema di misura e in base alle conoscenze che l'operatore ha su di esso e cioè:
  - specifiche tecniche dei costruttori dei vari componenti del sistema (incertezze sui valori di targa dei componenti utilizzati ecc...)
  - dati forniti in certificati di taratura (che dichiarano per esempio l'incertezza del campione interno al sistema utilizzato per la misurazione ecc...)

Incertezza tipo di categoria B 2/2

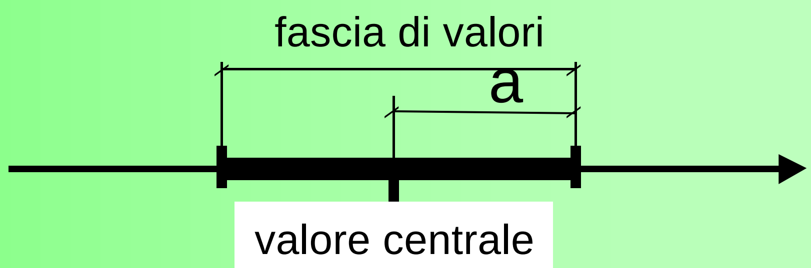
– dati (incertezze) di misurazioni precedenti effettuate su elementi del sistema

– esperienza dell'operatore

Esempi di incertezze di categoria B

- Le informazioni sulle **varie componenti** di incertezza di categoria B possono essere fornite in diversi modi:
  – incertezza U(x) con ipotesi di **distribuzione di probabilità normale** e un dato **intervallo di fiducia** (fattore di copertura k). Quindi l'incertezza tipo $u(x)$= U(x)/ k
  – semiampiezza massima **a** della fascia e ipotesi di **distribuzione di probabilità uniforme.** Ricordando che, per distribuzione uniforme $\sigma^2(x)=a^2/3$, l'incertezza tipo sarà:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Composizione incertezze tipo B 1/3

- Tutte queste componenti di incertezza vengono combinate quadraticamente, in base al modello che lega le varie grandezze

Composizione incertezze tipo B 2/3

- Tutte queste componenti di incertezza vengono combinate quadraticamente, in base al modello che lega le varie grandezze
- Nell'ipotesi di indipendenza statistica dei vari contributi **l'incertezza tipo di categoria B** sarà:

$$u^2_{n'} = \left(\frac{\partial f}{\partial_{n1}}\right)^2 u^2_{n_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial_{n2}}\right)^2 u^2_{n_2} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial_{nm}}\right)^2 u^2_{n_m}$$

Composizione incertezze tipo B 3/3

- Tutte queste componenti di incertezza vengono combinate quadraticamente, in base al modello che lega le varie grandezze.
- Nell'ipotesi di indipendenza statistica dei vari contributi **l'incertezza tipo di categoria B** sarà:

$$u_{n'}^{2} = \left(\frac{\partial f}{\partial n_{1}}\right)^{2} u_{n_1}^{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial n_{2}}\right)^{2} u_{n_2}^{2} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial n_{m}}\right)^{2} u_{n_m}^{2}$$

L'incertezza può essere espressa al solito in valore **assoluto, relativo o ridotto**

Composizione delle incertezze tipo B 1/2

- Come già visto in precedenza
  - se le N distribuzioni componenti sono normali, anche la distribuzione composita è normale
  - se le N distribuzioni componenti non sono normali, la distribuzione composita tende ad una gaussiana se $N \rightarrow \infty$

Composizione delle incertezze tipo B 2/2

- Nell'ipotesi di distribuzione normale
  - L'incertezza tipo u_n definisce la semiampiezza della fascia con livello di fiducia del 68,4% e valgono ancora i valori dei livelli di fiducia con i fattori di copertura già indicati (*k* =2, livello di fiducia 95,45%, *k*=3 per circa il 99% ecc..)

Composizione delle incertezze tipo A e B 1/2

- **La strategia completa di una misurazione può essere la seguente:**
  - definiti la procedura ed il sistema di misura si procede ad analizzarlo e valutare "a tavolino" u_B (incertezza tipo B)
  - se, ripetendo la misura, si nota una variabilità dei risultati si esegue una stima migliore della misura espressa dalla media
  - si stima u_A (incertezza tipo A)

Composizione delle incertezze tipo A e B 2/2

- in un sistema ben progettato i due contributi $\boldsymbol{u_B}$ e $\boldsymbol{u_A}$ dovrebbero risultare circa dello stesso ordine di grandezza
- si possono quindi combinare quadraticamente le incertezze tipo A e B per ottenere l'incertezza composta

$$u_{A,B} = \sqrt{u_A{}^2 + u_B{}^2}$$

Considerazioni sul sistema di misura

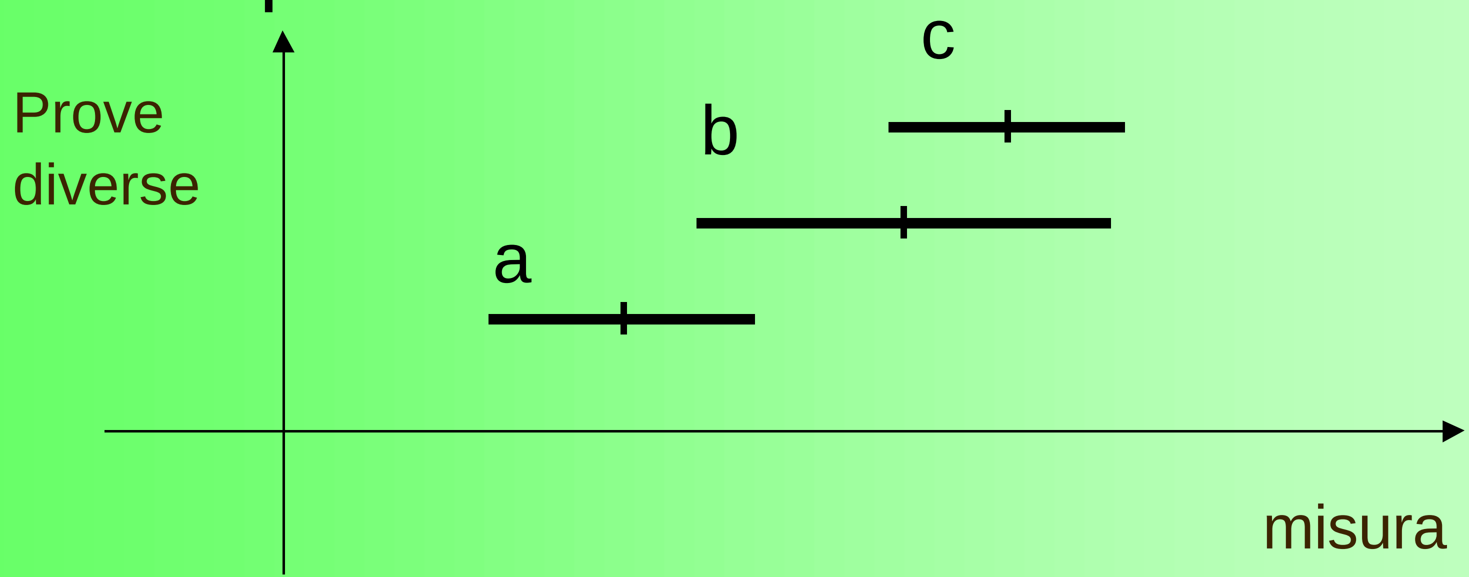
- Un sistema di misura di elevata qualità produce misure con incertezze di categoria B piccole.
- Se la ripetizione delle misure porta a valutare $u_A >> u_B$ può voler dire che:
  - il misurando è poco stabile
  - le fluttuazioni dei fattori di influenza danno contributi elevati
- Una u_A molto piccola **non necessariamente** implica che la misura sia accurata
- Nel caso di una misura singola si può valutare solo l'incertezza u_B

Compatibilità delle misure 1/4

- A causa dell'incertezza :
  - non ha significato parlare di **misure uguali**
  - il concetto di uguaglianza è sostituito da quello di **compatibilità tra misure**
  - le **misure sono compatibili** quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura della stessa quantità, nello stesso stato, hanno intersezione non nulla

Compatibilità delle misure 2/4

- Esempio:



- a e b sono compatibili
- b e c sono compatibili
- a e c NON sono compatibili

Compatibilità delle misure 3/4

- La compatibilità **NON** gode della **proprietà transitiva**
  - se a compatibile con b e b è compatibile c
  - non necessariamente è a compatibile con c

Compatibilità delle misure 4/4

- La compatibilità **NON** gode della **proprietà transitiva**
  - se a compatibile con b e b è compatibile c
  - non necessariamente è a compatibile con c
- Sono **mutuamente compatibili** le misure che hanno almeno un elemento in comune fra tutte le fasce di valore